Семинар 1

Задача 1

Показать, что угол, вписанный в окружность, равен половине центрального угла, опирающегося на ту же хорду.

Задача 2

Хорда делит окружность в отношении 7:11. Найдите вписанные углы, опирающиеся на эту хорду.

Задача 3

Докажите, что всякая трапеция, вписанная в окружность, — равнобедренная.

Задача 4

AB и AC — две хорды, образующие угол BAC, равный $70°$. Через точки B и C проведены касательные до пересечения в точке M. Найдите $\angle BMC$.

Задача 5

Пользуясь только циркулем, удвойте данный орезок, т.е. постройте для данных точек A и B такую точку C, чтобы точки A, B, C лежали на одной прямой (B между A и C) и $AC = 2AB$.

Задача 6

Луч PA пересекает данную окружность C в точках A и A', а луч PB - в точках B и B'. Докажите, что $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$.

Задача 7

Из предыдущей задачи следует, что произведение $T(P, \mathsf{C}) \equiv PA \cdot PA'$ не зависит от луча, а зависит только от взаимного расположения точки P и окружности C. Каков геометрический смысл величины $T(P, \mathsf{C})$? Выразить $T(P, \mathsf{C})$ через радиус окружности R и расстояние от P до центра окружности d. Что если P лежит внутри C?

Задача 8 (сложная)

Пусть даны две окружности C_1 и C_2. Найти геометрическое множество точек P обладающих свойством $T(P, \mathsf{C}_1) = T(P, \mathsf{C}_2)$.

Задача 9 (очень сложная)

В абсолютной геометрии (в геометрии без пятого постулата Евклида) доказать, что если существует хотя бы один треугольник с суммой углов в $180°$ то это справедливо для всех треугольников и мы имеем дело с Евклидовой геометрией.

Задача 10 (дополнительный материал)

Поговорить об инверсии и её применении в решении задач.