

Семинар 2

Задача 1

Пусть при инверсии с центром O точка A переходит в A^* , а точка B — в B^* . Докажите, что треугольники OAB и OB^*A^* подобны.

Задача 2

Докажите, что при инверсии с центром O прямая l , не проходящая через O , переходит в окружность, проходящую через O .

Задача 3

Докажите, что при инверсии с центром O окружность, проходящая через O , переходит в прямую, а окружность, не проходящая через O , — в окружность.

Задача 4

Докажите, что касающиеся окружности (окружность и прямая) переходят при инверсии в касающиеся окружности или в окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.

Задача 5

Докажите, что при инверсии сохраняется угол между окружностями (между окружностью и прямой, между прямыми).

Задача 6

Докажите, что две непересекающиеся окружности S_1 и S_2 (или окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

Задача 7

Через точку A проведена прямая l , пересекающая окружность S с центром O в точках M и N и не проходящая через O . Пусть M' и N' — точки, симметричные M и N относительно OA , а A' — точка пересечения прямых MN' и $M'N$. Докажите, что A' совпадает с образом точки A при инверсии относительно S (и, следовательно, не зависит от выбора прямой l).

Задача 8

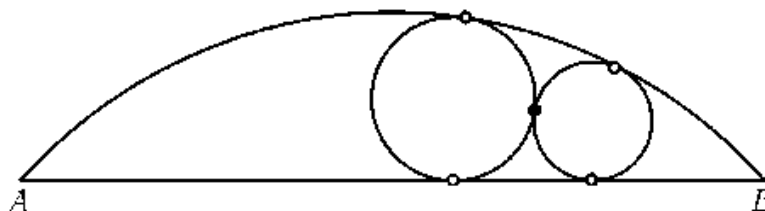
Постройте образ точки A при инверсии относительно окружности S с центром O .

Задача 9

Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности (или прямой).

Задача 10

В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей (см. рис.). Найдите множество их точек касания.



Задача 11

Проведите через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.

Задача 12

Постройте окружность, касающуюся данной окружности S и перпендикулярную двум данным окружностям S_1 и S_2 .

Задача 13 (Задача Аполлония)

Построить с помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся трех данных окружностей. (Задача сформулирована примерно в 220 г. до н. э.)