Семинар 3

Задача 1

- Повторить элементарные свойства инверсии.
- Повторить отображение окружностей и прямых в окружности и прямые (задачи 1–3 с семинара 2).
- Сохранение углов при инверсии (задачи 4–5 с семинара 2).
- Вспомнить из школьного курса как строить касательную к данной окружности, проходящую через данную точку с помощью циркуля и линейки.

Задача 2

Постройте образ точки A при инверсии относительно окружности S с центром O.

Задача 3

Построить с помощью циркуля и линейки образ данной окружности (прямой) при инверсии относительно окружности S с центром O. Разобрать несколько случаев.

Задача 4

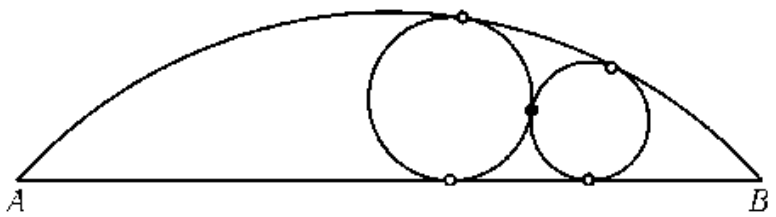
Доказать, что если окружность K ортогональна окружности инверсии, то $K^\star = K$.

Задача 5

Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности (или прямой).

Задача 6

В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей (см. рис.). Найдите множество их точек касания.



Задача 7

Проведите через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.

Задача 8

Докажите, что две непересекающиеся окружности S_1 и S_2 (или окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

Задача 9*

Через точку A проведена прямая l, пересекающая окружность S с центром O в точках M и N и не проходящая через O. Пусть M' и N' – точки, симметричные M и N относительно OA, а A' – точка пересечения прямых MN' и $M'N$. Докажите, что A' совпадает с образом точки A при инверсии относительно S (и, следовательно, не зависит от выбора прямой l).

Задача 10*

Постройте окружность, касающуюся данной окружности S и перпендикулярную двум данным окружностям S_1 и S_2.

Задача 11* (Задача Аполлония)

Построить с помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся трех данных окружностей. (Задача сформулирована примерно в 220 г. до н. э.)

Задача 12*

Обсудить свойства зеркальных отражений относительно прямой в (Евклидовой) плоскости. Получить полный набор движений плоскости с помощью отражений. Как получить вращение? Как получить параллельный перенос? Как отложить отрезок равный данному от данной точки в данном направлении?