

Семинар 6

Задача 1

Нарисовать примеры гиперболических окружностей на круге Пуанкаре. Совпадает ли гиперболический центр с Евклидовым для этих окружностей?

Задача 2

Множество точек равноудалённых от данной прямой называется эквидистантой (расстояние до прямой находится как длина перпендикуляра, опущенного на неё). В Евклидовой геометрии эквидистанта – это прямая (параллельная данной). Нарисовать эквидистанту на круге Пуанкаре. Помните, что на круге Пуанкаре под расстоянием имеется в виду гиперболическое расстояние.

Задача 3

Вспомнить, что такое экспонента. Построить график функций $y = e^x$. Найти наклон графика в точке x . Чему равна производная $(e^x)'$?

Задача 4

Вспомнить определения гиперболических синуса, косинуса и тангенса. Нарисовать их графики. Вычислить их производные. Чему равны e^x , $\text{sh } x$, $\text{ch } x$, $\text{th } x$ при малых $x \ll 1$?

Задача 5

Доказать:

a) $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$

c) $2 \text{sh } x \text{ ch } x = \text{sh}(2x)$

b) $\text{ch}^2(x) + \text{sh}^2(x) = \text{ch}(2x)$

d) $\text{sh}(x + y) = \text{sh } x \text{ ch } y + \text{ch } x \text{ sh } y$

Задача 6

Используя выведенное ранее соотношение $l_\rho = \ln \frac{R+\rho}{R-\rho}$ между Евклидовым радиусом ρ и гиперболическим радиусом l_ρ на круге Пуанкаре, получить обратное соотношение для ρ через l_ρ .

Задача 7

Выразить Евклидову длину маленького отрезка вдоль радиуса на круге Пуанкаре $d\rho$ через его гиперболическую длину dl_ρ . Получить также обратное соотношение.

Задача 8

Сравнить Евклидову метрику в полярных координатах

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\alpha^2$$

и гиперболическую метрику (в гиперболических полярных координатах круга Пуанкаре)

$$dl_s^2 = dl^2 + \operatorname{sh}^2 l d\alpha^2.$$

Найти длину гиперболической окружности радиуса l , пользуясь этой метрикой. Как можно упростить эту формулу при малых $l \ll 1$?

Задача 9*

Найти длину окружности на поверхности сферы радиуса $R = 1$, если её “сферический” радиус равен l . Сферический радиус определяется как радиус измеренный на поверхности сферы.

Задача 10*

Найти площадь гиперболического (или сферического) круга радиуса l .

Задача 11*

Углы сферического треугольника, построенного на сфере радиуса R , равны α , β и γ . Найти его площадь.

Подсказка: Сначала найдите площадь сферического двуугольника.