Лекция 1

1. Задача о кроликах

2. Числа Фибоначчи, последовательность Фибоначчи, рекуррентная формула

3. Свойства чисел Фибоначчи

   (a) Линейность

   (b) Теоретико-числовые свойства

   (c) Суммы: $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$, нечетных членов $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n+1}$ и.т.д.

4. Обобщенная последовательность Фибоначчи (последовательность с другими начальными данными)
   Определение: Назовем обобщенной последовательностью Фибоначчи (ОПФ) любую последовательность $x_1, x_2, \ldots$ такую, что $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ (x_1, x_2 - любые числа). Например, $1, 3, 4, 7, \ldots$ - это ОПФ.
   Покажем, что геометрические прогрессии $1, \Phi, \Phi^2, \ldots$ and $1, \bar{\Phi}, \bar{\Phi}^2, \ldots$ где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots$, $\bar{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618\ldots$, - это ОПФ.

5. Формула Бине
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

6. *Непрерывные дроби

7. *Филотаксис

Семинар 1

Задача 1 (приписывается Леонардо из Пизы известному как Фибоначчи, 1202)

Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения.

Сколько пар кроликов будет всего через один год (считать кроликов бессмертными)?

месяц		число пар
1		1
2		1
3		2
4		3
5		5

Задача 2

Показать, что для любого n, $F_1 + F_2 + \ldots F_n = F_{n+2} - 1$. [Подсказка: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.]

Задача 3

Найти сумму чисел Фибоначчи с нечетными номерами $F_1 + F_3 + \ldots F_{2n-1}$.

Задача 4

1. Какие из чисел Фибоначчи четны? Угадайте ответ, а потом покажите почему он верен.
2. Какие из чисел Фибоначчи делятся на 3?

*3. Какие из чисел Фибоначчи делятся на 35?

Задача 5

Покажите, что для любых чисел a, b, последовательность заданная $x_n = a\Phi^n + b\bar{\Phi}^n$ (где $\Phi, \bar{\Phi}$ были определены выше), это ОПФ, то есть $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$.
Подсказка: используйте $\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n$, $\bar{\Phi}^{n+2} = \bar{\Phi}^{n+1} + \bar{\Phi}^n$

Задача 6

Покажите, что для $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, мы имеем $a\Phi^0 + b\bar{\Phi}^0 = 0$, $a\Phi^1 + b\bar{\Phi}^1 = 1$.

Задача 7

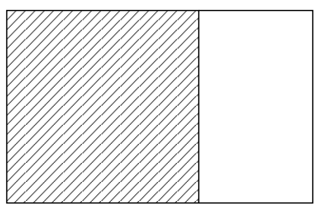
Комбинируя результаты двух предыдущих задач выведите следующую формулу для чисел Фибоначчи (формула Бине)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Число Φ называется "Золотое сечение" и часто появляется в математике (в старину его иногда называли "Божественная пропорция"). Целые книги написаны об этом числе. Примеры, как возникает золотое сечение приведены в следующих задачах.

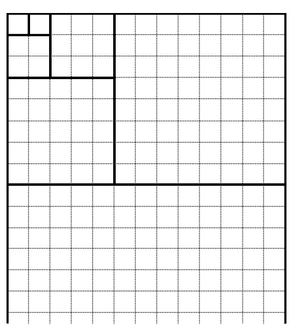
Задача 8

Рассмотрите прямоугольник со сторонами 1 и Φ. Покажите, что если отрезать от него квадрат 1×1, то оставшийся прямоугольник подобен исходному, то есть, его стороны относятся как $1 : \Phi$.



Задача 9

Пусть $F_1, F_2, \ldots$ это числа Фибоначчи. Попробуйте угадать формулу для $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2$ используя приведенный рисунок.



Задача 10

Вывести формулу для последовательности $x_1, x_2, \ldots$ если $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ и $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ (то есть последовательность это ОПФ).

Задача 11

Используя метод математической индукции докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

для любого натурального n.

Задача 12

Цепной дробью называется выражение

$$[a_0, a_1, a_2, a_3] \equiv a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}},$$

где a_k целые числа. Цепная дробь также может быть бесконечной $[a_0, a_1, a_2, \dots]$.

Найти представление в виде цепной дроби для

1. $\frac{10}{7}$,
2. $\frac{55}{34}$,
3. $\sqrt{2}$,
4. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Лекция 2

1. Золотое сечение. Прямоугольник золотого сечения. Деление отрезка в “золотой” пропорции. Филотаксис и сосновые шишки.

2. Цепные дроби. Простые примеры представлений в виде цепной дроби. Подходящие дроби как рациональные приближения. $\frac{23}{16}, \sqrt{2}, \pi, \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Выделенность золотого сечения.

3. Числа Лукаса: ОПФ $1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$.

4. Последовательность $F_{n+1} = 5F_n - 6F_{n-1}$. Вывод формулы для произвольного члена.

   (a) Угадать для следующих начальных даных:
   $1, 2, \ldots$
   $1, 3, \ldots$
   $1, 4, \ldots$ - трудно угадать.

   (b) Геометрическая прогрессия $q = 2, 3$, суперпозиция, коэффициенты из начальных данных.

Семинар 2

Задача 1

Цепной дробью называется выражение

$$[a_0, a_1, a_2, a_3] \equiv a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}},$$

где a_k целые числа. Цепная дробь также может быть бесконечной $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$.

Найти представление в виде цепной дроби для

1. $\frac{10}{7}$,
2. $\frac{21}{13}$ и в общем случае $\frac{F_{n+1}}{F_n}$,
3. $\sqrt{3}$,
4. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Задача 2

Найти хорошее приближение дробью с маленьким знаменателем числа $2\frac{37}{75}$.
Подсказка: разложите данное число в цепную дробь.

Задача 3

Великое противостояние Марса – это момент когда Марс находится ближе всего к Земле. Эти противостояния повторяются примерно каждые 15 лет. Почему?
Подсказка: Земной год равен примерно $365\frac{1}{4}$ суток, а марсианский - 687 суток ($687/365\frac{1}{4} \approx 1.88$).

Задача 4

Доказать тождество для чисел Фибоначчи: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Задача 5

Найти формулу для общего члена последовательности $F_{n+1} = 5F_n - 6F_{n-1},\ F_0 = 1$, $F_1 = 5$.

*Задача 6

Найти формулу для общего члена последовательности $F_{n+1} = 6F_n - 11F_{n-1} + 6F_{n-2},\ F_0 = 1$, $F_1 = 5$, $F_2 = 3$.

Задача 7

Найти формулу для общего члена последовательности $F_{n+1} = F_n + 2F_{n-1},\ F_0 = 1$, $F_1 = 5$.

Задача 8

Найти формулу для общего члена последовательности $F_{n+1} = 2F_n - F_{n-1},\ F_0 = 1$, $F_1 = 5$.

Задача 9

Найти формулу для общего члена последовательности $F_{n+1} = F_{n-1},\ F_0 = 1, F_1 = 5$.

Задача 10

Найти формулу для общего члена последовательности $F_{n+1} = -F_{n-1},\ F_0 = 1, F_1 = 5$.

Лекция 3

1. Линейная рекуррентная последовательность второго порядка $F_{n+1} = \alpha F_n + \beta F_{n-1}$. Заданы F_0, F_1. Характеристическое уравнение $q^2 - \alpha q - \beta = 0$.

   (a) $\alpha^2 + 4\beta > 0$. Общее решение $F_n = aq_1^n + bq_2^n$.

   (b) $\alpha^2 + 4\beta = 0$, то есть $\beta = -\alpha^2/4$. Случай вырожденного корня. Общее решение $F_n = aq^n + bnq^n$.

   (c) $\alpha^2 + 4\beta < 0$. Нет действительных корней. Вводим понятие корня из единицы и записываем общее решение в виде $F_n = aq_1^n + bq_2^n$, где $q_{1,2}$ - комплексные числа.

   (d) Пример $F_{n+2} = -F_n$ с начальными данными $F_0 = 1$, $F_1 = 3$.

2. Комплексные числа. Определить как $a + bi$, то есть как точку на плоскости с координатами $(a; b)$. Сложение и умножение комплексных чисел. Пример деления на комплексное число. Комплексное сопряжение. Модуль и аргумент комплексного числа. Их геометрический смысл (длина и угол вектора). Декартова и полярная формы записи комплексного числа.

Семинар 3

Задача 1

Найти формулу для общего члена последовательности $F_{n+1} = 4F_n - 4F_{n-1},\ F_0 = 1,\ F_1 = -2.$

Задача 2

Найти формулу для общего члена последовательности $F_{n+1} = F_n + 2F_{n-1},\ F_0 = 3,\ F_1 = 0.$

Задача 3

Вычислите значения следующих выражений (ответ представить в виде $a + bi$)

(a) $(1+2i)(3+i)$ (b) i^3

(c) $(1+i)^2$ (d) $(1+i)^7$

(e) $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

Задача 4

Доказать теоремы:
a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
b) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

Задача 5

Докажите, что $|zw| = |z||w|$.

Докажите, что любое комплексного числа $z \neq 0$ имеет обратное, то есть существует такое число w что $zw = 1$ (подсказка: $z\bar{z} = |z|^2$).

Задача 6

Вычислите:

(a) $(1+i)^{-1}$ (b) $\dfrac{1+i}{1-i}$ (c) $(3+4i)^{-1}$ (d) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

Задача 7

1. Найти комплексное число z такое, что $z^2 = i$.
2. Найти комплексное число z такое, что $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

[Подсказка: запишите z в виде $z = a + bi$ и, затем, напишите и решите уравнение для a, b]

Задача 8

Найти модуль и аргумент следующих чисел:
a) $1 + i$
b) $-i$
c) $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
(подсказка: покажите, что точки 0, w, $\bar{w}$ образуют правильный треугольник)

Задача 9

Найдите комплексное число, аргумент которого $\pi/4 = 45^\circ$, а модуль 2.

Задача 10

Покажите, что:

1. $|\bar{z}| = |z|$, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
2. Число $\frac{\bar{z}}{z}$ имеет модуль один. Каков аргумент этого числа, если аргумент z равен ϕ?
3. Проверьте часть (2) для $z = 1 + i$ явным вычислением.

Лекция 4

1. Комплексное сопряжение. Модуль и аргумент комплексного числа. Модуль произведения комплексных чисел.

2. Комплексное число с модулем 1. Тригонометрическая форма комплексного числа.

3. Умножение на комплексное число как преобразование плоскости. Умножение на комплексное число с модулем 1 – поворот на аргумент числа.

4. Тригонометрические тождества и формула Муавра.

Семинар 4

Задача 1

1. Найти комплексное число z такое, что $z^2 = i$.
2. Найти комплексное число z такое, что $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

[Подсказка: запишите z в виде $z = a + bi$ и, затем, напишите и решите уравнение для a, b]

Задача 2

Найти модуль и аргумент следующих чисел:
a) $1 + i$
b) $-i$
c) $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
(подсказка: покажите, что точки 0, w, $\bar{w}$ образуют правильный треугольник)

Задача 3

Найдите комплексное число, аргумент которого $\pi/4 = 45^\circ$, а модуль 2.

Задача 4

Покажите, что:

1. $|\bar{z}| = |z|$, $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
2. Число $\frac{\bar{z}}{z}$ имеет модуль один. Каков аргумент этого числа, если аргумент z равен ϕ?
3. Проверьте часть (2) для $z = 1 + i$ явным вычислением.

Задача 5

Изобразите следующие множества точек на комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

1. $\{z | \operatorname{Re} z = 1\}$
2. $\{z \,|\, |z| = 1\}$
3. $\{z \,|\, \arg z = 3\pi/4\}$ (угол $3\pi/4$ в радианах – это то же самое, что $135°$).
4. $\{z \,|\, \operatorname{Re}(z^2) = 0\}$
5. $\{w \,|\, |w - 1| = 1\}$
6. $\{w \,|\, |w^2| = 2\}$
7. $\{z \,|\, z + \bar{z} = 0\}$

Задача 6

Какие преобразования комплексной плоскости задаются следующими формулами

(a) $z \to iz$	(b) $z \to (1 + i\sqrt{3})z$	(c) $z \to \dfrac{z}{1+i}$
(d) $z \to \dfrac{z + \bar{z}}{2}$	(e) $z \to (1 - 2i + z)$	(f) $z \to \dfrac{z}{\lvert z \rvert}$
(g) $z \to i\bar{z}$	(h) $z \to -\bar{z}$	

Нарисуйте образ квадрата $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$ при каждом из этих преобразований.

Семинар 5

Задача 1

Докажите формулу Муавра: если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то
$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Задача 2

Вычислить
$$(1-i)^{12}, \qquad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010}, \qquad (i\sqrt{3}-1)^{17}$$

Задача 3

Найти два комплексных числа таких, что $z_1 + z_2 = 2$, $z_1 z_2 = 5$.

Задача 4

Используя правило сложения аргументов при умножении комплексных чисел, выведите формулы для $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$, $\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ через sin и cos от φ_1, φ_2.
Подсказка: пусть $z_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$, $z_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$; тогда $z_1 z_2 = ?$

Задача 5

Используя формулу Муавра, напишите чему равны $\cos(3\varphi), \sin(3\varphi)$ через $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

*Задача 6

Вычислите $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$.
Подсказка: если $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, чему равна сумма $1 + z + z^2 + \cdots + z^n$?

*Задача 7

Выведите формулу для корней квадратного уравнения с комплексными коэффициентами $p, q \in \mathbf{C}$
$$z_{1,2} = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\tfrac{p^2}{4} - q}$$
где $\pm\sqrt{D}$ – это два решения уравнения $w^2 = D$ (заметим, что нет никакого разумного способа сказать какое из решений следует назвать $\sqrt{D}$ и какое $-\sqrt{D}$).

Задача 8

Решите следующие уравнения в комплексных числах. Вы можете оставить ответы в тригонометрической форме

1. $z^2 = 1 + i$
2. $z^2 + 2z + 2 = 0$
3. $z^3 = 1$
4. $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$
5. $z^4 = -2$

Задача 9

Покажите на комплексной плоскости все корни пятой степени из 1 и все корни пятой степени из -1.

Задача *10

1. Найдите все корни уравнения $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$.
2. Не выполняя деление “уголком” покажите, что $1 + x + x^2 + \cdots + x^9$ делится на $1 + x + \cdots + x^4$.

Лекция 6

1. Произведение комплексных чисел, скалярное и векторное произведения, площадь параллелограмма.
2. Экспонента.
3. Ряды для экспоненты e^x и для $\sin(x)$, $\cos(x)$.

Семинар 6

Задача 1

Решите следующие уравнения в комплексных числах. Вы можете оставить ответы в тригонометрической форме

1. $z^3 = -1$
2. $z^6 = -32$
3. $z^5 = 1 + i\sqrt{3}$

Задача 2

Покажите на комплексной плоскости все корни пятой степени из 1 и все корни пятой степени из -1.

Задача 3

Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{A} = (4, 1)$ и $\vec{B} = (-3, 1)$. Как можно найти угол между векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$?

Ряды для экспоненты, синуса и косинуса.

Известно, что для действительных чисел справедливы следующие формулы

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots, \quad (1)$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \ldots, \quad (2)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots. \quad (3)$$

Последние две формулы справедливы только если x - это угол в радианах. Мы будем считать формулы (1,2,3) определением соответствующих функций для комплексных значений x.

Задача 4

Найдите действительную и мнимую части выражения e^{ix}, где x - действительное число. Сделайте то же самое для e^{-ix}.

Задача 5

Найдите действительную и мнимую части чисел $e^{i\pi}$, $e^{2i\pi}$ и $e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Задача 6

Найдите алгебраический вид комплексного числа:

$$a)\ e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad b)\ e^{2+i\pi} \qquad c)\ e^{\pi e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

Задача 7

Пользуясь выведенной формулой $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ покажите, что

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}, \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Задача 8

Найдите алгебраический вид комплексного числа:

$$a)\ \cos(i) \qquad b)\ \sin(i) \qquad c)\ \cos(1-i)$$

Задача 9

Пользуясь выведенной формулой $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ покажите, что любое комплексное число может быть записано в <u>показательной форме</u>.

$$z = |z|\, e^{i \arg(z)}.$$

Как выглядит умножение комплексных чисел в показательной форме?

Задача 10

Представьте комплексное число в показательной форме:

$$a)\ 2i \qquad b)\ -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Задача 11

Пусть $P(z)$ – многочлен с действительными коэффициентами.

1. Покажите, что для любого комплексного z мы имеем $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
2. Покажите, что если $a \in \mathbf{C}$ – корень, то $\overline{a}$ тоже корень $P(z)$.

*Задача 12

1. Найдите все корни уравнения $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$.
2. Не выполняя деление “уголком” покажите, что $1 + x + x^2 + \cdots + x^9$ делится на $1 + x + \cdots + x^4$.

Лекция 7

1. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел.

2. Натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа. Замкнутость множества чисел относительно различных операций.

   (a) $\mathcal{N}$. Натуральные (сложение, умножение)

   (b) $\mathcal{Z}$. Целые (+ вычитание)

   (c) $\mathcal{Q}$. Рациональные (+ деление)

   (d) $\mathcal{R}$. Действительные (+ взятие нижней и верхней границы)

   (e) $\mathcal{C}$. Комплесные (+ нахождение корней полиномов – алгебраическая замкнутость)

3. Полиномы и корни полиномов.

4. Факторизация полиномов. Деление полиномов уголком.

Лекция 8

1. Изменение аргумента $P_n(z)$ вдоль контура при отсутствии корней внутри контура.
   (a) Маленький контур.
   (b) Большой односвязный контур.
2. Основная теорема алгебры (Гаусс).
3. Кватернионы.

Семинар 7

Задача 1

Рассмотрите уравнение $x^3 - 4x^2 + 6x + 11 = 0$.

1. Решите это уравнение (Подсказка: один из корней — целый).
2. * Найдите сумму и произведение корней двумя способами: по теореме Виета и явным вычислением. Убедитесь, что результаты совпадают.

Задача 2

Пусть $P(z)$ – многочлен с действительными коэффициентами.

1. Покажите, что для любого комплексного z мы имеем $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
2. Покажите, что если $a \in \mathbf{C}$ – корень, то $\overline{a}$ тоже корень $P(z)$.

Задача 3

Поделите уголком

a) $\frac{2x^6-3x^5+5x^2-4}{x-1}$.

b) $\frac{3x^5-2x^2+x-7}{x^2-3}$.

*Задача 4

1. Найдите все корни уравнения $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$.
2. Не выполняя деление “уголком” покажите, что $1 + x + x^2 + \cdots + x^9$ делится на $1 + x + \cdots + x^4$.
3. Проверьте предыдущий результат разделив один многочлен на другой уголком.

*Задача 5

1. Пусть $f(z)$ — полином с действительными коэффициентами, и $a \in \mathbf{C}$ — комплексный корень $f(z)$. Предположим, что $a \notin \mathbb{R}$. Покажите, что $g(z) = (z - a)(z - \overline{a})$ — это полином с действительными коэффициентами, и что $f(z)$ делится на $g(z)$.
2. Используя основную теорему алгебры, покажите, что любой полином с действительными коэффициентами может быть записан как произведение полиномов с действительными коэффицентами максимум второй степени.
3. Запишите полином x^6-1 как произведение полиномов с действительными коэффициентами максимум второй степени.

Задача 6

Выведите формулу для n-ного члена рекуррентной последовательности $F_{n+1} = 2F_n - 4F_{n-1}$, $F_0 = 1$, $F_1 = 3$. Чему равен F_{1000}?